第4讲 反比例函数

**知识梳理**

**1．反比例**

如果两个变量的每一组对应值的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成**反比例**．用数学式子表示两个变量x、y成反比例，就是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，或表示为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，其中k是不等于零的常数．

如果两个变量的每一组对应值的乘积是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成**反比例**．用数学式子表示两个变量x、y成反比例，就是xy=k，或表示为其中k是不等于零的常数．

**2．反比例函数**

解析式形如\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(k是常数，k≠0)的函数叫做**反比例函数**，其中k也叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

自变量和因变量的乘积是一个不等于零的常数；

反比例函数由系数k确定；

反比例函数的定义域是不等于零的所有实数．

**[注意]**(1)从形式上，反比例函数的左边是因变量，右边是分母为自变量x的分式，分母不能是多项式，只能是x的一次单项式，其核心是x、y的乘积为一个非零常数．如都不是反比例函数．

(2)在中，自变量x是分式的分母．当x=0时，分式无意义，所以x≠0．

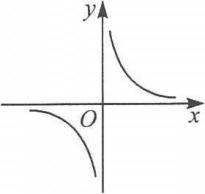
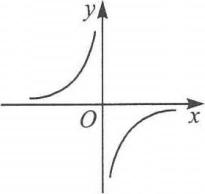
(3)由于反比例函数(k为常数，k≠0)中，x、y、k均为非零实数，所以反比例函数也可以表示为y=kx-1(k为常数，k≠0)的形式，或xy=k(k为常数，k≠0)的形式．

**3．反比例函数的图像和性质**

反比例函数(k为常数，k≠0)的图像是由两条曲线组成的，这两条曲线通常称为**双曲线**．

当k>0时，两个分支分别位于第一、三象限内(如左图所示)．

当k<0时，两个分支分别位于第二、四象限(如右图所示)

**[注意]**(1)知道反比例函数的解析式中的比例系数k的值，可以判断其图像所在的象限，也可以画出具体的图像(双曲线)．

(2)由于反比例函数中，x、y的值不能为零，所以其图像——双曲线的两个分支只能无限靠近坐标轴，不会与坐标轴相交．

(3)反比例函数的图像既是中心对称图形，也是轴对称图形，其对称中心是**坐标原点**；对称轴是**两坐标轴夹角平分线**所在的直线．

**反比例函数(k是常数，k≠0)有如下性质**：

(1)当k>0时，函数图像的两支分别在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；在每个象限内，当自变量x的值逐渐增大时，y的值随着逐渐\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)当k<0时，函数图像的两支分别在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；在每个象限内，当自变量x的值逐渐增大时，y的值随着逐渐\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**[注意]**(1)描述反比例函数值的增减情况时，必须指出在“哪个象限内”，即研究反比例函数的增减性时，只能在每个分支所在的象限内讨论，尽管这两个分支的增减性相同，也不能笼统地合在一起．

(2)反比例函数图像的位置和函数的增减性都是由比例系数k的符号决定的．反过来，由双曲线所在位置或函数的增减性，也可以推出k的符号．

**4．反比例函数(k为常数，k≠0)中比例系数k的几何意义**

(1)如图，在反比例函数的图像上任取一点P(x，y)，过这一点分别作x轴、y轴的垂线PM，PN，垂足分别为点M、N，所得的矩形PMON的面积S=PM·PN=|y|·|x|=|xy|，因为所以xy=k，所以S=|k|，即过双曲线上任意一点作x轴、y轴的垂线，所得的矩形面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．|k|．

(2)如图所示，在反比例函数0)的图像上任取一点E，过点E作EF⊥y轴于点F，连接OE，因为点E在反比例函数的图像上，设点E(x，y)，那么xy=k，且EF=|x|，OF=|y|，所以S△EOF=．即过双曲线上任意一点作一坐标轴的垂线，并将该点与原点相连，所得三角形的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[注意](1)在利用反比例函数的比例系数k的几何意义时，不仅要注意矩形的面积大小，还要注意函数图像的位置，从而确定k的值；

(2)因为中k有正、负之分，所以在利用函数解析式求矩形、三角形面积时，都加上绝对值符号．

**5．反比例函数图像和性质的应用**

一般地，反比例函数图像和性质的应用大体包括两个方面：一是利用反比例函数解决生活实际问题；二是解决和反比例函数本身有关的数学问题．如求字母系数的值和取值范围，与几何图形结合起来考查有关知识．

**典型解析**

**例1：**下列问题中的两个变量是否成反比例？如果是，可以用怎样的数学式子来表示？

(1)平行四边形的面积为20平方厘米，变量分别是平行四边形的一条边长a(厘米)和这条边上的高h(厘米)；

(2)被除数为100，变量分别是除数r和商q；

(3)一位男同学练习1000米长跑，变量分别是男生跑步的平均速度v(米/秒)和跑完全程所用的时间t(秒)．

解：(1)平行四边形的一条边长a(厘米)和这条边上的高h(厘米)的乘积ah=20(平方厘米)，所以a与h成反比例，a与h的关系可表示为

(2)当被除数为100时，除数r和商q的乘积rq=100，所以r与q成反比例，r与q的关系可表示为

(3)当路程为1000米时，跑步的平均速度v(米/秒)和跑完全程所用的时间t(秒)的乘积vt=1000，所以v与t成反比例，v与t的关系可表示为

**例2：**(1)下列函数：其中y是x的反比例函数的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(填序号)．[解析]反比例函数解析式的三种常见形式：(k为常数，k≠0)，y=kx-1(k为常数，k≠0)，xy=k(k为常数，k≠0)，其核心是x、y的乘积为一个非零常数．当a为不等于0的常数时是反比例函数，否则不是反比例函数．

[答案]②⑤

(2)若y=(a+1)是反比例函数，则a的取值为( )．

A．1 B．-1 C．±1 D．任意实数

[解析]由反比例函数的概念知，a2-2=-1且a+1≠0，解得a=1．

[答案]A

**【变式训练】**

若函数为关于x的反比例函数，求m的值．

[错解]因为函数为关于x的反比例函数，所以|m|=1，解得m=±1．

[错解分析]错解中忽略了反比例函数0)中的隐含条件k≠0，即m+1≠0，所以m≠-1．

[正解]根据反比例函数定义，得解得m=1．

**例3：**已知y是x的反比例函数，且当x=+2时，y=-2，求当y=+1时，x的值．

**分析：**对于反比例函数，确定了比例系数就可以确定这个反比例函数的解析式．因此可以将x=+2，y=-2代入，求得比例系数．

**解：**设反比例函数为

把x=+2，y=-2代入，得

解得k=-1．

因此，反比例函数解析式为．

把y=+1代入反比例函数解析式，得

解得x=-+1．所以当y=+1时，x的值为-+1．

**例4：**已知y=y1+y2，y1与x+1成正比例，y2与x+1成反比例，当x=0时，y=-5；当x=2时，y=-7．(1)求y与x的函数关系式．(2)当y=5时，求x的值．

答案：

**【变式训练】**

已知y=y1-y2，y1与成正比例，y2与x成反比例，且当x=1时，y=-14，x=4时，y=3．求：(1)y与x之间的函数关系式．(2)自变量x的取值范围．(3)当时，y的值．

答案：(1)(2)x>0；(3)-69．

**例5：**画反比例函数和的图像．

画反比例函数的图像．

(1)列表：反比例函数的定义域是不等于零的所有实数，在列表时，自变量x的值不能取零，可以取一些正数和负数，计算出相应的函数值y，如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | … | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
| y | … | -1 | - | - | - | -2 | - | -4 | -8 | 8 | 4 |  | 2 |  |  |  | 1 | … |

(2)描点：分别以x所取的值和相应的y值作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点．

(3)连线：把第一象限内的各点用光滑的曲线连接，再向两方伸展，得到图像的一支；

用同样的方法在第三象限画出图像的另一支．

函数的图像如图所示．

Image17

画反比例函数的图像．

(1)列表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | … | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
| y | … |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | … |

(2)描点；

(3)连线．

函数的图像如图所示．

反比例函数(k是常数，k≠0)的图像叫做双曲线(hyperbola)，它有两支．

Image18

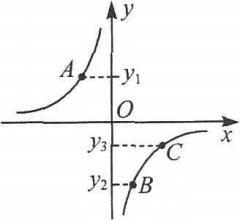
你能说出这两个函数图像的异同吗？

相同点：(1)它们的图像都是由两支曲线组成；(2)它们的图像与两坐标轴都没有交点；(3)它们的形状相同；(4)分别关于原点对称．

不同点：函数的图像的两支分布在一、三象限；函数的图像的两支分布在二、四象限．

****

**例6：**A(-1，y1)，B(1，y2)，C(3，y3)是反比例函数y=图像上的三点，请你正确排出y1、y2、y3的大小顺序．

解决这个问题我们可以先画一个草图，并描出A、B、C三点的大致位置(如图所示)，然后借助其增减性(或直接观察图像)即可比较它们的大小．

由此，我们容易得到y1>y3>y2这一结论．

[注意](1)反比例函数的图像是相互独立、断开的，并且是关于原点对称的双曲线，但在每个分支上的各点都是连续的．

(2)借助反比例函数及其图像比较实数的大小要抓住两点：①比较的实数所涉及的点的坐标是否在同一个分支上；②只有在同一个分支上的点，才能借助其增减性比较实数的大小．

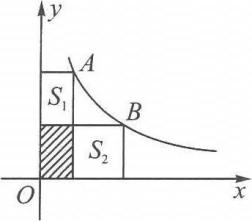
**【变式训练】**

已知点(-2，y1)，(-1，y2)，(3，y3)在反比例函数(m为常数)的图像上，试比较y1，y2，y3的大小．

[错解]因为-m2-1=-(m2+1)<0，所以函数的图像在第二、四象限内，且y随x的增大而增大，又-2<-1<3，因此y1<y2<y3．

[错解分析]由于反比例函数的图像有两支曲线，因此在比较函数值的大小时应分两种情况来考虑，错解中未将已知的三个点分两种情况来考虑，只是根据当k<0时，函数值y随x的增大而增大进行判断，从而出现解题错误．

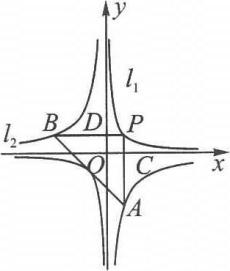
[正解]因为-m2-1=-(m2+1)<0，所以函数的图像在第二、四象限内，且在每一个象限内，y随x的增大而增大．因为点(-2，y1)，(-1，y2)在第二象限内，且-2<-1，所以0<y1<y2．因为点(3，y3)在第四象限内，所以y3<0．所以y3<y1<y2．

**例7：**如图所示，A、B两点在双曲线上，分别经过A、B两点向坐标轴作垂线段，已知S阴影=1，则S1+S2等于( )．

A．3 B．4 C．5 D．6

[解析]已知点A、B是双曲线上的点，分别经过A、B两点向x轴、y轴作垂线段，则根据反比例函数的图像的性质和k的几何意义得两个矩形的面积都等于|k|=4，∴S1+S2=4+4-1×2=6．

[答案]D

**例8：**如图所示，函数和的图像分别是l1和l2．设点P在l1上，PC⊥x轴，垂足为C，交l2于点A，PD⊥y轴，垂足为D，交l2于点B，则三角形PAB的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

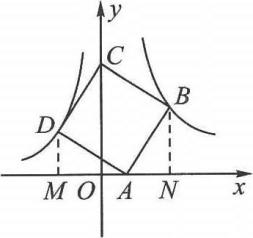
[解析]∵点P在上，∴|xp|×|yp|=|k|=1，∴设P的坐标是(a为正数)．∵PA⊥x轴，∴A点的横坐标是a．∵A点在上，∴A点的坐标是．∵PB⊥y轴，∴B点的纵坐标是点在上，∴代入得解得x=-3a，∴B点的坐标是PB=|a-(-3a)|=4a．∵PA⊥x轴，PB⊥y轴，x轴⊥y轴，∴PA⊥PB，∴△PAB的面积是4a=8． 故填8．

[答案]8

[点评]根据反比例函数的图像和性质，结合三角形面积公式，由P点坐标得出A、B点的坐标是解题的关键．

**例9：**如图所示，点B(3，3)在双曲线上，点D在双曲线上，点A和点C分别在x轴、y轴的正半轴上，且点A、B、C、D构成的四边形为正方形．

(1)求k的值；(2)求点A的坐标．



[解](1)∵B(3，3)在双曲线上，∴k=3×3=9．

(2)过D点作DM⊥x轴于M，过B点作BN⊥x轴于N，则∠DMA=∠ANB=90°．∵B(3，3)，∴BN=ON=3．设MD=a，OM=b，∵D点在双曲线上，∴-ab=-4，即ab=4．

∵四边形ABCD是正方形，∴∠DAB=90°，AD=AB．

∴∠DAM+∠BAN=90°，

又由题意可知∠MDA+∠DAM=90°，

∴∠ADM=∠BAN．

在△ADM和△BAN中

∴△ADM≌△BAN(AAS)，

∴AM=BN=3，AN=MD=a，

∴OA=3-a，即AM=b+3-a=3，即a=b．

∵ab=4，∴a=b=2，∴OA=3-2=1．

即点A的坐标是(1，0)．

**同步训练**

**一、填空题**

1．已知反比例函数y=-，比例系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当变量x取-3时的函数值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当函数值y取-3时，变量x的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

2．近视眼镜的度数y(单位：度)与镜片焦距x(单位：m)成反比例(即)．已知200度近视眼镜的镜片焦距为0．5m，则y与x之间的函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．[解析]将x=0．5，y=200代入得k=100，则y与x之间的函数解析式为．

[答案]

3．已知反比例函数的图像经过点P(a+1，4)，则a=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-3

4．函数y=-当x>0时，y\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0，相应的图像在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限内，y随x的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：<；四；增大

5．若反比例函数y=(2m-1)的图像在第二、四象限，则m=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-1；

6．若点P1(-1，m)，P2(-2，n)在反比例函数的图像上，则m\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_n(填“>”“<”或“=”)．

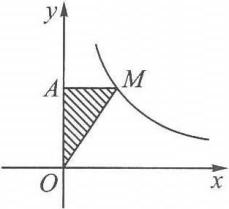
[解析]在反比例函数中，k>0，∴该函数图像的两支分别位于第一、第三象限，且在每一个象限内，y随x的增大而减小，又∵-2<-1<0，∴m<n．

[答案]<

7． 已知P1(x1，y1)，P2(x2，y2)是同一个反比例函数图像上的两点，若x2=x1+2，且则这个反比例函数的表达式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[解析]设反比例函数的表达式为0)，因为所以x2=x1+因为x2=x1+2，所以解得k=4，所以反比例函数的表达式为

[答案]

8．如图所示，M为反比例函数的图像上的一点，MA⊥y轴，垂足为A，△MAO的面积为2，则k的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[解析]∵MA⊥y轴，∴S△AOM=即|k|=4．而k>0，∴k=4．

[答案]4

**二、选择题**

9．某玩具厂计划生产一种玩具熊猫，已知每个玩具熊猫的成本为y元，若该厂某月生产x个(x取正整数)，这个月的总成本为5000元，则y与x之间满足的函数表达式为( )．

A． B． C． D．

[解析]一个玩具熊猫的成本y(元)与月生产个数x的积就是该月的总成本，即y·x=5000，故选C项．

[答案]C

10．对于反比例函数下列说法正确的是( )．

A．图像经过点(1，-3) B．图像位于第二、第四象限

C．x>0时，y随x的增大而增大 D．x<0时，y随x的增大而减小

答案：D [提示]对于反比例函数当x=1时，y=3，故A项错误；因为k=3>0，所以反比例函数的图像的两支分别位于第一、第三象限，且在每一个象限内，y随x的增大而减小，故B、C项均错误，D项正确．

**三、解答题**

11．某地上年度电价为0．8元／千瓦时，年用电量为1亿千瓦时．本年度计划将电价调至0．55元～0．75元之间，经测算，若电价调至x元，则本年度新增用电量y(亿千瓦时)与(x-0．4)元成反比例．又当x=0．65时，y=0．8．求y与x之间的函数关系式．

答案：∵y与(x-0．4)成反比例，

设

把x=0．65，y=0．8代入上式，得即

12．已知反比例函数的表达式为分别根据下列条件求出字母k的取值范围．

(1)函数图像位于第一、三象限；

(2)在函数图像所在的每一个象限内，y随x的增大而增大．

答案：(1)根据题意知4-k>0，得k<4；

(2)由题意知4-k<0．即k>4．

**【探索创新】**

已知反比例函数(k≠0)，且在每个象限内y随着x的增大而增大，取图像上一点M向x轴作垂线，垂足为N，且MN长度为3，△MON的面积为8．

(1)求M点的坐标；

(2)求此反比例函数的解析式；

(3)设这图像上有一点P，过P点作y轴垂线，垂足为Q，当|PQ|=12时，求△OPQ的面积．

**答案：**(1)由于S△MON=|MN|·|NO|=8，则|NO|=或

(2)y=

(3)由题意，得或 ．所以，S△OPQ==8

**走进中考**

1．(2017·上海中考)如果反比例函数y=（k是常数，k≠0）的图像经过点(2，3)，那么在这个函数图像所在的每个象限内，y的值随x的值增大而 ．（填“增大”或“减小”）

答案：减小

2．(2016·上海中考)已知反比例函数（），如果在这个函数图像所在的每一个象限内，的值随着的值增大而减小，那么的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．